

Зрачење Херцовог дипола: оригинални Херцов постунак

Милан С. Ковачевић, Мирослав Јовановић

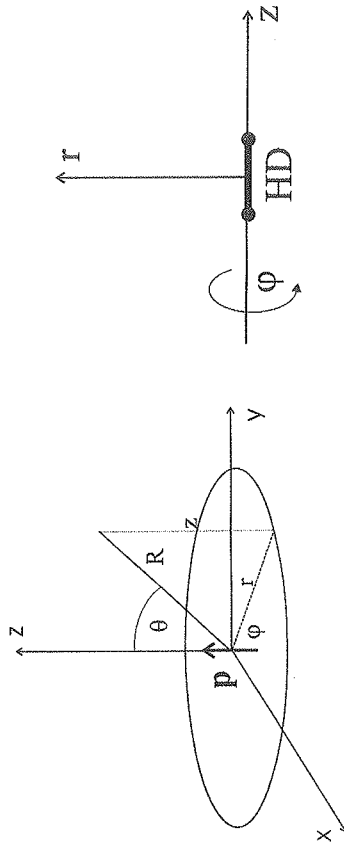
*Природно-математички факултет, Крагујевац
Гимназија Јосиф Панчић, Бајина Башта*

Анстракт. У раду је даг преглед оригиналног Херцовог теоријског поступка у анализи зрачења Херцовог дипола. Тај занимљив поступак данас је скоро заборављен и тешко се може наћи у уџбеницима. На потребу да се врати у фокус пажње Херцова функција Q указао је професор Божидар Анџин у свом научном раду који је цитран у списку литературе. Помоћу програма *Mathematica 8.0* формиран су цртежи линије силе око Херцовог дипола за четири карактеристична тренутка.

Кључне речи: Херцов дипол, линије сила Херцовог дипола

Херцов теоријски поступак

У центру цилиндричног координатног система налази се Херцов дипол са осом дуж z -осе система. Посматра се аксијално симетричан тип електромагнетског таласа који има две компоненте електричног поља E_r , E_θ и једну компоненту магнетског поља H_ϕ .



Слика 1. Херцов дипол и примењени координатни систем.

Максвелове једначине $\text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\text{rot}\vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, када се из Декартовог система преведу у цилиндрични систем, дају три диференцијалне једначине које описују електромагнетско поље Херцовог дипола[1,2]:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_r}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (3)$$

Вектори електричног и магнетног поља су међусобно нормални. Линије магнетног поља су концентрични кругови у односу на осу дипола, а линије електричног поља леже у меридијанским равнинама. Херц уводи помоћну функцију $Q(r, z)$ помоћу смене $rH_\varphi = \varepsilon_0 \partial Q / \partial t$. У овођењем ове функције, изрази за компоненте електричног поља постају: $E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r}$ и $E_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial z}$. Помоћна функција Q омогућава да се израчунају компоненте поља, док једначину за функцију Q налазимо помоћу једначине (1) и саме дефиниције функције Q :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + r \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Даље, Херц уводи смену. Увео је функцију Π на следећи начин: $Q = r \frac{\partial \Pi}{\partial r}$, након чега једначина (4) добија облик таласне једначине:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = c^2 \Delta \Pi. \quad (5)$$

Пошто је $Q = r \frac{\partial \Pi}{\partial r}$, једначине за компоненте поља постају:

$$rE_z = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right), \quad rE_r = -\frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \quad \text{и} \quad rH_\varphi = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right).$$

За просто хармонијско осциловање Херцовог дипола, решење једначине (5) се може потражити у облику:

$$\Pi = \Pi_0 \frac{\sin \Phi}{R}, \quad (6)$$

где је фаза таласа $\Phi = \omega t - kR$. Овде је $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\omega = 2\pi / T$ је кружна учестаност таласа а $k = 2\pi / \lambda$ је таласни број. Талас типа $\sin \Phi / R$ може се звати сферни талас, будући да се од тачкастог извора у координатном почетку шири на све стране, а амплитуда му опада обрнуто пропорционално са растојањем R од извора. Када се зна решење за величину Π , можемо наћи и таласно решење за помоћну функцију Q . Пошто је $Q = r \frac{\partial \Pi}{\partial r}$, заједно са $r/R = \sin \theta$, добија се:

$$Q = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\Pi_0 \frac{\sin \Phi}{R} \right) = -\Pi_0 \frac{r^2}{R^2} k \left(\cos \Phi + \frac{1}{kR} \sin \Phi \right),$$

$$Q = -\Pi_0 k \sin^2 \theta \left(\cos \Phi + \frac{1}{kR} \sin \Phi \right). \quad (7)$$

Овде је $\Pi_0 = -\frac{qI}{4\pi\varepsilon_0}$, након чега решење (7) постаје:

$$Q = \frac{qI}{4\pi\varepsilon_0} k \sin^2 \theta \left(\cos \Phi + \frac{1}{kR} \sin \Phi \right). \quad (8)$$

Ово решење је погодно за пртање линија силе електромагнетског поља. Ради лакшег коришћења израза (8) погодно је извршити његову нормализацију. Ако се функција Q подели са њеном амплитудом $Q_0 = k \frac{qI}{4\pi\varepsilon_0}$ добија се:

$$Q_n = \frac{Q}{Q_0} = \sin^2 \theta \left(\cos \Phi + \frac{1}{kR} \sin \Phi \right). \quad (9)$$

Да бисмо лакше читали ове формуле, поновимо значење појединих величина:

$$\sin \theta = r/R = (r/\lambda) / \sqrt{(r/\lambda)^2 + (z/\lambda)^2},$$

$$\Phi = (t/T - R/\lambda),$$

$$R/\lambda = \sqrt{(r/\lambda)^2 + (z/\lambda)^2}.$$

Цртежи линија сила Херцовог дипола

Алгоритам како треба цртати линије силе, у сагласности са Херцовим поступком, подразумева најпре следећа два корака: (а) прво се задаје време, тј. параметар t/T , (б) онда једначина $Q = \text{const}$ даје фамилије кривих у равни $\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{z}{\lambda} \right)$.

Херц је графички представио линије у квадрату стране приближно $3\lambda/2$ за четири тренутка времена 0, $T/8$, $T/4$ и $3T/8$. познавајући вредност параметра t/T могу се добити графички линија силе. Да бисмо добили графике потребно је да знамо вредности Q за сваку криву. Разлике у вредности величине Q између суседних кривих линија ΔQ су константне и једнаке за сва четири графика. Најпре подешавамо да број линија буде исти или сличан као на Херцовим графичима (видети у референци [1]). Затим израчунавамо вредности ΔQ , добијамо вредности приближно 0.2. У раду [1] пише $\Delta Q = 0.2$, тако да графички зависе само од једног параметра, прве вредности Q_n .

На графичима су приказани спектри линија поља дипола у разним тренуцима. Ови спектри приказују процес формирања поља око дипола а нарочито прелаз из индукционог у поље зрачења.

Зрачење Херцовог дипола: класична теорија

Милан С. Ковачевић, Мирослав Јовановић

*Природно-математички факултет, Крагујевац
Гимназија Јосиф Панчић, Бајина Башта*

Анстракт. У раду је обрађен проблем зрачења Херцовог дипола. Описано је како се класично решава и тумачи електромагнетско поље око Херцовог дипола, помоћу функција потенцијала A и φ . Изведени су изрази који карактеришу поље зрачења дипола. Указано је на условну поделу поља на блиску и далеку зону. На крају је дата и формула за снагу зрачења Херцовог дипола.

Кључне речи: Херцов дипол, Поинтингов вектор.

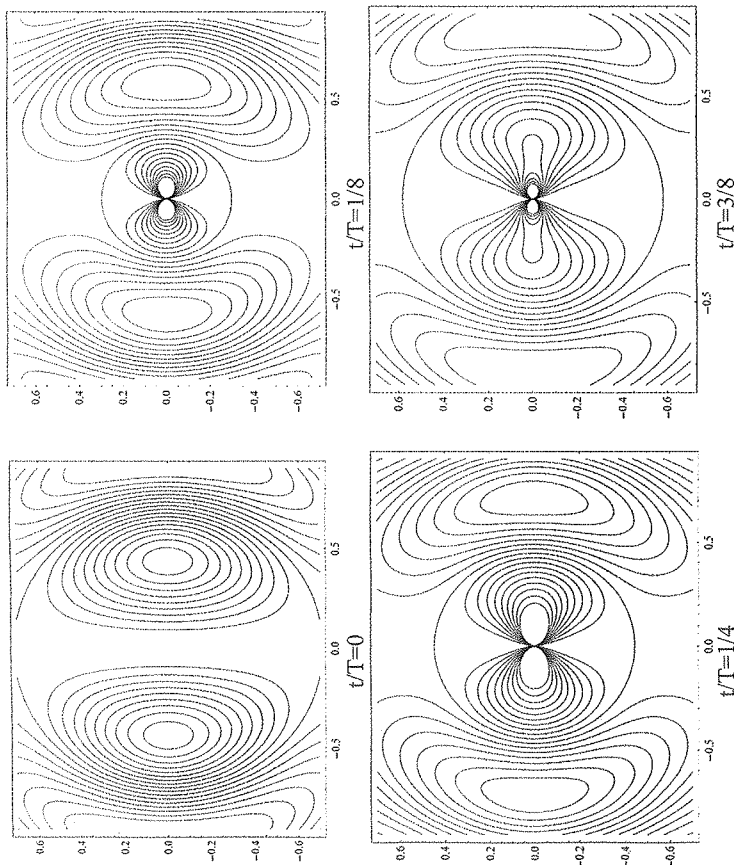
КЛАСИЧНА ТЕОРИЈА ХЕРЦОВОГ ДИПОЛА

Херцов дипол је најједноставнији систем за зрачење електромагнетских таласа. Састоји се од проводника, дужине l , који се на крајевима завршава са две проводне кугле. У средини проводника делује генератор високофреквентних осцилација. Кугле имају улогу кондензатора који се наизменично пуне и празне и на тај начин омогућавају да се у кратком проводнику, који их спаја, одржава променљива струја $i = dq/dt$, где је q наелектрисање кугле. Ако генератор лаје хармонијске осцилације, тада је наелектрисање дипола $q = q_0 \sin \omega t$; диполни момент се такође мења хармонијски у времену, тј. $p = p_0 \sin \omega t$. Овде је $p_0 = q_0 l$ амплитуда електричног момента. Јачина струје у диполу је $i = q_0 \omega \cos \omega t$ а амплитуда струје је $i_0 = q_0 \omega$. Одавде налазимо да је амплитуда електричног диполног момента $P_0 = i_0 l / \omega$.

Електромагнетно поље дипола се може анализирати применом електромагнетских потенцијала A и φ . Карактер поља дипола битно зависи од тога на ком се растојању налази тачка у којој израчунавамо поље. Поставимо дипол у координатни почетак колинеарно са z -осом и израчунајмо поље у тачки M чије је растојање од дипола много веће од дужине самог дипола. Детаљно израчунавање поља дипола налазимо у литератури која је дата на крају рада. Векторски потенцијал има само z компоненту, коју пишемо у следећем облику

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i(t-r/c)}{r} \quad (1)$$

Скаларни потенцијал дипола једнак је алгебарском збиру потенцијала које стварају наелектрисања на сферама:



Слика 2. Спектри поља дипола у разним тренутцима.

Закључак

У раду је обрађен проблем зрачења Херцовог дипола. Фокус је стављен на оригинални Херцов поступак, цртања линија сила око кратког дипола. Детаљно је изведена функција Q и помоћна функција P из које се она добија. Дато је кратко упутство како се ова функција користи за цртање линија сила око дипола. У програму *Mathematica 8.0* нацртане су линије силе око Херцовог дипола, за четири карактеристична тренутка. Добијени графици се могу упоредити са Херцовим графицима који се могу наћи у радовима [1,2]. Искрпну дискусију о неукрштању линија сила налазимо у научном раду професора Божидара Аничина који је цитиран у слиску литературуе.

Литература

1. Aničin B., 2008, Reading Hertz's own dipole, *Euror. J. Physics* 9 (1) 15-23.
2. Hertz H., 1893, *Electric Waves, being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity through Space* (London: MacMillan) (with a preface by Lord Kelvin).

